- تمرين: نفرض $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولتكن $X_1, X_2, \ldots, X_6$ عينة لـ X ولتكن $T_1 = a\{(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2\}$ مقدراً نقطياً لـ σ^2 .. والمطلوب:

1- عين قيمة الثابت a من أجل أن يكون T_1 مقدّراً منصفاً لـ σ^2

2- نفرض أن: $T_2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X})$ مقدراً آخر لـ σ^2 عندئذٍ، بيّن أياً من المقدرين أكفأ (أفضل)..

__الحل__: لدينا فرضاً: $ET_1 = \sigma^2$ ولدينا: $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$

أيضاً $X_3 - X_4 \sim N(0, 2\sigma^2)$ و $X_5 - X_6 \sim N(0, 2\sigma^2)$

وبالتالي:

$$\frac{T_1}{2a\sigma^2} = \left(\frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - X_4 - 0}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5 - X_6 - 0}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2$$

$$= \chi^2(1) \qquad \chi^2(1) \qquad \chi^2(1)$$

$$\frac{T_1}{2a\sigma^2} \sim \chi^2(3)$$

كدرجات حرية

$$E\left(\frac{T_1}{2a\sigma^2}\right) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2a\sigma^2} ET_1 = 3 \Rightarrow$$

(بالفرض $ET_1 = \sigma^2$)

$$ET_1 = 6a\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 6a\sigma^2 \Rightarrow$$

$$6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

أي أن:

$$T_1 = \frac{1}{6}\{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2\}$$

هنا نجد أن:

$$\frac{6T_1}{2\sigma^2} \sim \chi^2(3) \Rightarrow V\left(\frac{3T_1}{\sigma^2}\right) = \sigma \Rightarrow$$

$$\frac{9}{\sigma^4} V(T_1) = 6 \Rightarrow V(T_1) = \frac{6}{9}\sigma^4 \Rightarrow V(T_1) = \frac{2}{3}\sigma^4$$

$$\frac{5T_2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(5)$$

/ /

$$E\left(\frac{5T_2}{\sigma^2}\right) = 5 \Rightarrow \frac{5}{\sigma^2} E T_2 = 5 \Rightarrow E T_2 = \sigma^2$$

$$V\left(\frac{5T_2}{\sigma^2}\right) = \frac{25}{\sigma^4} V(T_2) = 10 \Rightarrow V(T_2) = \frac{10\sigma^4}{25}$$

$$= \frac{2}{5}\sigma^4 = \frac{6}{15}\sigma^4$$

$$V(T_1) = \frac{2}{3}\sigma^4 = \frac{10}{15}\sigma^4$$

$$\Rightarrow V(T_2) < V(T_1).$$

وبالتالي فإن $V(T_2)$ أفضل (أكفأ) من $V(T_1)$.

الإحصاء الكافي (المقدّر الكافي):

* نفرض لدينا مجتمع إحصائي موصوف بتوزيع احتمالي وسيطه المجهول θ ولنأخذ من عينة عشوائية بحجم n عندئذ: نقول عن المقدّر ~~[illegible]~~ النقطي للوسيط θ أنه إحصاء كافي إذا أعطى معلومات كافية عن هذا الوسيط وذلك على أساس هذه العينة ومن أجل أن اثبت أن مقدراً ما هو إحصاء كافي يوجد لدينا قاعدتين ← القاعدة الأولى: هي أن يكون

① $P(x_1, x_2, \ldots, x_n / \overset{\text{المقدر}}{T} = t)$

خال من الوسيط θ هذا يعني أن T إحصاء كافي..

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n / T)$$

التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرات العينة

② $L = P(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P_{x_i}(x_i, \theta)$ خال من الوسيط θ

$= g(t, \theta) \cdot H(X_1 \ldots X_n)$ { $g(t,\theta)$ دالة كثافة الإحصاء t

$f(x_1, x_2, \ldots x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i, \theta)$

$= g(t, \theta) \cdot H(x_1, \ldots x_n)$

<u>مثال</u>: نفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً برنولياً وسيطه p ولنأخذ منه عينة عشوائية بحجم n عندئذ بين أن الإحصاء: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يمثل إحصاء كافي.

Farah Notebook

/ /

الحل:

التوزيع الاحتمالي

$$P_X(x,p) = p^x (1-p)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} P_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(x_i p) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$P(x_1, \dots x_n / T = t) = \frac{P(x_1, x_2 \dots x_n /, t = \sum x_i)}{P_T(t)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_n = x_n, T = t)}{P(T = t)}$$

$$= \frac{P(x_1, x_2, \dots x_n)}{P(T = t)} = \frac{p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}}{P_T(t)}$$

بقي علينا ما هو التوزيع الاحتمالي لـ T

وهي الدالة المولدة للعزوم

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (M_X(t))^n = (q + pe^t)^n \Rightarrow$$

$$P_T(t) = C_t^n p^t q^{n-t}$$

$$\Rightarrow = \frac{p^t q^{n-t}}{C_t^n p^t q^{n-t}} = \frac{1}{C_t^n}$$

وواضح أنّ $\frac{1}{C_t^n}$ خال من الوسيط p هذا يعني أنّ التوزيع المشترك الشرطي خالٍ من الوسيط وبالتالي $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يمثل احصاءً كافياً للوسيط p.

طريقة أخرى:

$$L = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = p^t (1-p)^{n-t} = (C_t^n p^t (1-p)^{n-t}) \frac{1}{C_t^n}$$

$$= g(t, p) \cdot H(X_1, X_2, \dots X_n)$$

أي أننا استطعنا كتابة L في المجتمع الإحصائي على شكل جداء دالتين الأولى تابعة لـ t, p وتمثل توزيعاً احتمالياً لبرنولي وسيطاه الأول p والثاني n والثاني تابع فقط لمتغيرات العينة العشوائية وهي H التابعة لـ X

/ /

مثال: نفترض لدينا مجتمعاً احصائياً معرفاً بدالة كثافة احتمالية

$$f(x,\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad ; \quad x > 0$$

فلنأخذ من هذا المجتمع عينة عشوائية حجمها n كمشاهدات.

بين أن: $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يمثل احصاءً كافياً لـ α

الحل: لدينا:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n / t) = \frac{f(x_1 \ldots x_n)}{f_T(t)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)}{f_T(t)} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum x_i}{\alpha}}}{f_T(t)}$$

والآن سوف نعين دالة الكثافة T عن طريق الدالة المولدة:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (M_X(t))^n = (1 - \alpha^{\frac{t}{s}} t)^{-1})^n = (1 - \alpha t)^{-n}$$

وهي دالة مولدة لگاما وسيطها الأول: $\lambda = n$ ووسيطها الثاني $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ وبالتالي:

$$f_T(t) = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda - 1} e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء T وبالتالي:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n / t) = \frac{\frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{t}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}}}$$

خالية من الوسيط α هذا يعني أن $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ يمثل احصاءً كافياً

طريقة أخرى:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x_i}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum x_i}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{t}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} \cdot e^{-\frac{t}{\alpha}} \cdot \frac{\Gamma(n)}{t^{n-1}}$$

وهي دالة كثافة لگاما بوسيطيه α, n

$$= g(t, \alpha) \cdot H(X_1, \ldots X_n)$$

/ /

معلومات فيشر:

إذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي وسيطه المجهول θ ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n عندئذٍ بالتعريف. معلومات فيشر: هي المعلومات التي تعطيها العينة العشوائية حول هذا الوسيط ولإيجاد هذه المعلومات ننتهج مايلي:

لدينا L تمثل التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرات العينة عندئذٍ علينا أن نثبت:

$$\int_{R_n} L \cdot dv = 1 \quad \ldots \boxed{1}\ ; \quad dv = dx_1 \cdot dx_2 \ \ldots\ dx_n)$$

نشتق طرفي العلاقة (1) بالنسبة للوسيط θ لنجد أن:

$$\int_{R_n} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies \int_{R_n} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \cdot L \cdot dv = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right) = 0 \quad \ldots \boxed{2}$$

الآن سوف نشتق طرفي العلاقة (2) بالنسبة لـ θ مرة أخرى:

$$\int_{R_n}\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \cdot L + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 \cdot L\right] \cdot dv = 0$$

$$\int_{R_n} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 \Big] L \cdot dv = 0 \implies$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2\right) = 0 \implies$$

$$E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2$$

$$V\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 - \left(E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)\right)^2$$

$$\implies E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 = V\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)$$

وهي معلومات فيشر التي تعطيها العينة التي حجمها n حول الوسيط θ.

/ /

$$I_L = E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = V\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2$$

ملاحظة: لدينا $L = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i, \theta)$ ومنه نجد أن:

$$\Leftarrow \ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} \Rightarrow$$ نشتق مرة أخرى

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} \Rightarrow \frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}$$

نأخذ التوقع الرياضي للطرفين

$$E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{-\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\Rightarrow I_L = \sum_{i=1}^{n} I_f \Rightarrow I_L = n I_f$$

مثال:

افرض لدينا مجتمعا إحصائيا بواسونيا وسيطه المجهول λ ولدينا عينة عشوائية حجمها n كذلك عين معلومات فيشر حول الوسيط λ ..

الحل:

$$L = \prod_{i=1}^{n} P_{x_i}(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln L = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$\Rightarrow$ نشتق الطرفين جزئيا بالنسبة لـ λ فنجد أن:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda}$$

نشتق مرة أخرى بالنسبة لـ λ فنجد أن:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} \Rightarrow -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} E x_i \Rightarrow I_L = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$

/ /

وهي معلومات فيشر التي تقدمها العينة التي حجمها n حول الوسيط θ

مثال: مجتمع إحصائي موصوف بـ $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$; $x > 0$

$= 0$ خلاف ذلك

ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n والمطلوب ايجاد معلومات فيشر

الحل: $L = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta}}$ $\xrightarrow[\text{الطرفين}]{\text{نأخذ لوغاريتم}}$ $\ln L = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$

نشتق بالنسبة لـ θ:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^2}$$

نشتق مرة أخرى

$$\Rightarrow \frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta^3}$$

نضرب بإشارة (-)

$$\Rightarrow -\frac{d^2 \ln L}{d\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} + 2\frac{\sum X_i}{\theta^3}$$

نأخذ التوقع الرياضي للطرفين:

$$\Rightarrow I_L = E\left(\frac{-d^2 \ln L}{d\theta^2}\right) = \frac{-n}{\theta^2} + 2\frac{\sum_{i=1}^{n} E X_i}{\theta^3}$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

وهي معلومات فيشر التي تقدمها العينة العشوائية حول الوسيط θ.

المقدّر النقطي ذو التباين الأصغري:

لنفرض لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي وسيطه المجهول هو θ ولنأخذ منه عينة حجمها n ولتكن $T = ((\theta(x_1, x_2 \dots x_n)$ مقدّر نقطي موصوف لتابع وسيط θ لأي عينة آخذه $ET = \psi(\theta)$ عندئذٍ سوف نتحقق لدينا المتباينة التالية: $V(T) \geq \frac{(\psi'(\theta))^2}{I_L}$

وتدعى هذه المتباينة متباينة غرامر - راو

وعندما تحصل المساواة في هذه المتباينة يتبين أن التباين (T أصغري يعطى الطرف الأعيز من المتباينة لحد غرامر وفي الحالة الخاصة إذا كانت $\psi(\theta) = \theta$ عندئذٍ تصبح متباينة غرامر - راو على الشكل $V(T) \geq \frac{1}{I_L}$

حيث الطرف الايمن من متباينة غرامر - راو

وهو مقلوب معلومات فيشر..